الدرس 8-1

تفسير التمثيلات البيانية للدوال

السابق
- تعرفت على الدوال وأوجدت قيم الدالة.

الحالي
1. تفسير التقاطعات وتناظر التمثيل البياني للدالة.
2. تفسير السلوك الموجب والسالب والتزايد والنقصان والقيم العظمى والسلوك الطرفي للتمثيل البياني للدالة.

لماذا؟
- ارتفعت مبيعات ألعاب الفيديو، بما في ذلك الأجهزة والبرمجيات والملحقات، في بعض الأحيان وانخفضت في أحيان أخرى على مدار سنوات. يمكن تمثيل مبيعات التجزئة لألعاب الفيديو سنويًا في الولايات المتحدة من عام 2000 إلى 2009 بالتمثيل البياني لدالة غير خطية.

مفردات جديدة

تقاطع	(intercept)
التقاطع مع المحور الأفقي x	(x-intercept)
التقاطع مع المحور الرأسي y	(y-intercept)
التناظر المحوري	(line symmetry)
موجب	(positive)
سالب	(negative)
تزايدية	(increasing)
تناقصية	(decreasing)
قيم عظمى	(extrema)
قيمة عظمى نسبية	(relative maximum)
قيمة صغرى نسبية	(relative minimum)
السلوك الطرفي	(end behavior)

ممارسات رياضية
فهم طبيعة المسائل والمثابرة في حلها

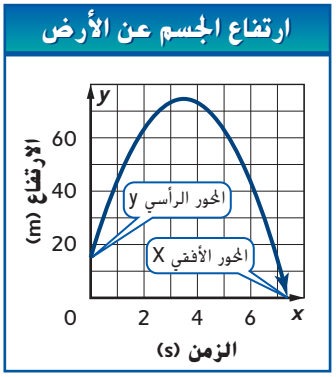
1 تفسير التقاطعات والتناظر

لتفسير التمثيل البياني لدالة، قدّر الخصائص الرئيسية وفسّرها.

تقاطعات التمثيل البياني هي نقاط يتقاطع عندها التمثيل البياني مع محور. الإحداثي y للنقطة التي يتقاطع عندها التمثيل البياني مع المحور الرأسي y يُطلق عليه التقاطع مع المحور الرأسي **y**. وعلى نفس المنوال الإحداثي x للنقطة التي يتقاطع عندها التمثيل البياني مع المحور الأفقي x يُطلق عليه التقاطع مع المحور الأفقي **x**.

مثال 1 من الحياة اليومية تفسير التقاطعات

الفيزياء يوضح التمثيل البياني الارتفاع **y** لجسم كدالة للوقت x. حدد الدالة باعتبارها ***خطية*** أو ***غير خطية***. ثم قدّر التقاطعات وفسّرها.



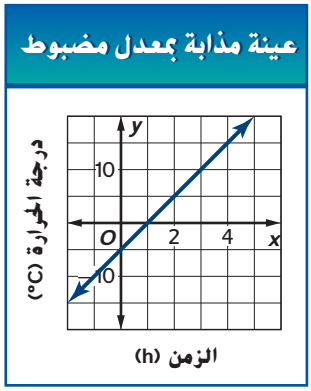
خطية أم غير خطية: بما أن التمثيل البياني منحنى وليس خطًا، فالتمثيل البياني غير خطي.

التقاطع مع المحور الرأسي y: يقطع التمثيل البياني المحور y عند النقطة (0, 15) تقريبًا. إذًا، فقيمة نقطة تقاطع التمثيل البياني مع المحور الرأسي y هي 15 تقريبًا. يعني هذا أن الجسم بدأ بارتفاع مبدئي يبلغ 15 مترًا تقريبًا فوق الأرض.

التقاطع (التقاطعات) مع المحور الأفقي x: يقطع التمثيل البياني المحور x عند النقطة (7.4, 0) تقريبًا. إذًا، فقيمة نقطة التقاطع مع المحور الأفقي x هي 7.4 تقريبًا. يعني هذا أن الجسم لمس الأرض بعد 7.4 ثوانٍ تقريبًا.

تمرين موجه

1. يوضح التمثيل البياني درجة الحرارة y لعينة طبية تمت إذابتها بمعدل مضبوط. حدد الدالة باعتبارها خطية أو غير خطية. ثم احسب قيمة التقاطعات وفسّرها.



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

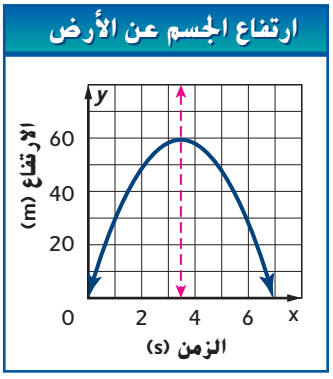
توضح التمثيلات البيانية لبعض الدوال خاصية رئيسية أخرى: التناظر. يتسم التمثيل البياني **بالتناظر المحوري** على المحور الرأسي y أو خط رأسي آخر في حالة التطابق التام بين كل نصف للتمثيل البياني على جانبي الخط.

مثال 2 من الحياة اليومية تفسير التناظر

الفيزياء **تحرك جسم. يوضح التمثيل البياني الارتفاع y للجسم كدالة للزمن x.**
صف وفسر أي تناظر.

النصف الأيمن من التمثيل البياني هو صورة متطابقة من النصف الأيسر تقريبًا في الخط $x = 3.5$ بين $x = 0$ و$x = 7$ تقريبًا.

في سياق الموقف، يبين لك تناظر الرسم أن الزمن الذي استغرقه الجسم للارتفاع يساوي الزمن الذي استغرقه للانخفاض.



تمرين موجه

2. صف أي تناظر ظاهر في التمثيل البياني في التمرين الموجه 1 وفسّره.

نصيحة دراسية

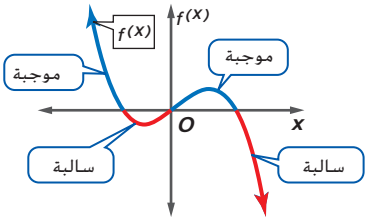
التناظر لا يظهر في التمثيلات البيانية لمعظم الدوال من الحياة اليومية تناظرًا على مدار المجال بالكامل. إلا أن الكثير منها تضمّن تناظرًا على مدار أقسام أصغر من المجال تستحق التحليل.

2 تفسير القيم العظمى والسلوك الطرفي

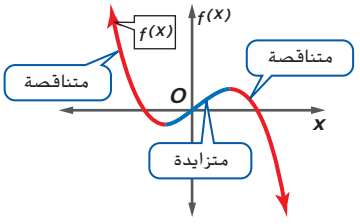
يتضمن تفسير التمثيل البياني أيضًا تقدير وتفسير مكان زيادة الدالة وانخفاضها والمكان الذي تكون فيه موجبة أو سالبة والمكان الذي تكون فيه أي قيمة في الدالة قيمة عظمى في ارتفاعها أو انخفاضها.

المفهوم الأساسي موجبة وسالبة ومتزايدة ومتناقصة والقيمة القصوى والسلوك الطرفي

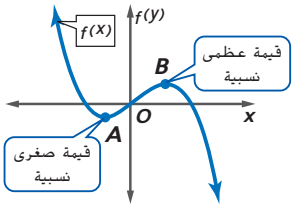
تكون الدالة **موجبة** عندما يقع التمثيل البياني لها فوق المحور الأفقي x وتكون **سالبة** عندما يقع التمثيل البياني لها *أسفل* المحور الأفقي x.



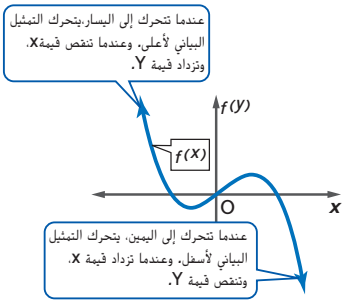
تزداد الدالة عندما يتحرك التمثيل البياني *لأعلى* و**تنقص** عندما يتحرك التمثيل البياني *لأسفل* عند مشاهدته من اليسار إلى اليمين.



النقاط المعروضة هي مواقع قيم دالة مرتفعة أو منخفضة نسبيًا تُسمى **القيم العظمى**.
النقطة A هي **قيمة صغرى نسبية** بما أنه لا توجد في الجوار نقاط أخرى لها إحداثي y أصغر.
النقطة B هي **قيمة عظمى نسبية** بما أنه لا يوجد في الجوار نقاط لها إحداثي y أكبر.



السلوك الطرفي يصف قيم الدالة عند القيم العظمى الموجبة والسالبة في المجال.



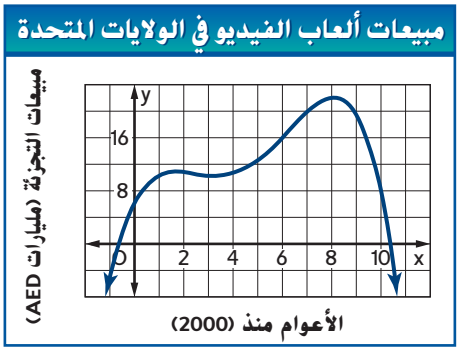
نصيحة دراسية

السلوك الطرفي يمكن وصف السلوك الطرفي لبعض التمثيلات البيانية بأنه يقترب من قيمة y معينة. في هذه الحالة، يبدو قسم من التمثيل البياني كخط أفقي.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

مثال 3 من الحياة اليومية تفسير القيم القصوى والسلوك الطرفي

ألعاب الفيديو يمكن تمثيل مبيعات التجزئة في الولايات المتحدة من ألعاب الفيديو من عام 2000 إلى 2009 بالدالة الممثلة بيانيًا على اليسار. قدر وفسر النقاط التي تكون الدالة فيها موجبة وسالبة وتزيد وتنقص وإحداثيات x لأي قيم قصوى نسبية والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.



موجبة: بين $x = -0.6$ و$x = 10.4$ **تقريبًا**

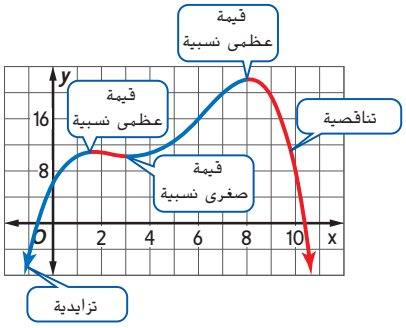
سالبة: عندما تكون $x < -0.6$ و$x > 10.4$ **تقريبًا**

يعني هذا أنه كانت هناك مبيعات موجبة بين عامي 2000 و2010 تقريبًا، لكن النموذج يتوقع مبيعات سلبية بعد 2010 تقريبًا؛ مما يشير إلى انهيار مستبعد للصناعة.

تزايدية: عندما تكون $x < 1.5$ تقريبًا وبين

$x = 3$ و$x = 8$ تقريبًا

تناقصية: بين $x = 2$ و$x = 3$ تقريبًا
وعندما تكون $x > 8$ تقريبًا



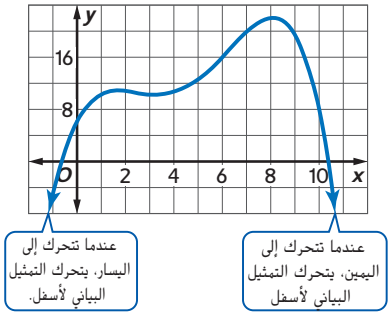
يعني هذا أن المبيعات زادت من عام 2000 إلى 2002 تقريبًا وانخفضت بين عامي 2002 و2003 وزادت بين عامي 2003 و2008 وكانت في انخفاض منذ عام 2008.

القيم العظمى النسبية: عندما تكون $x = 1.5$ تقريبًا و$x = 8$

القيم الصغرى النسبية: عندما تكون $x = 3$ **تقريبًا**

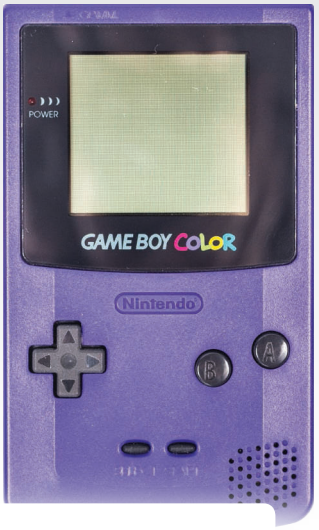
توضح القيمة العظمى في التمثيل البياني أن الصناعة شهدت ذروتين نسبيتين في المبيعات أثناء هذه الفترة: إحداهما في حدود عام 2002 بقيمة 10.5 مليارات AED تقريبًا والأخرى في حدود عام 2008 بقيمة 22 مليار AED تقريبًا. وقع انخفاض نسبي بقيمة 10 مليارات AED في المبيعات في حدود عام 2003.

السلوك الطرفي:
مع زيادة قيمة x أو انخفاضها، تنخفض قيمة y.
يوضح السلوك الطرفي للرسم البياني مبيعات سالبة على مدار عدة سنوات قبل عام 2000 وعدة أعوام بعد عام 2009، وهذا مستبعد. يبدو أن هذا التمثيل البياني لا يمثل إلا المبيعات بين عامي 2000 و2009 ولا يمكن استخدامه لتوقع المبيعات في 2010.



تمرين موجه

3. قدّر وفسر النقاط التي تكون فيها الدالة الواردة في التمرين الموجه 1 موجبة وسالبة وتزيد أو تنقص وإحداثي x لأي قيم عظمى نسبية والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.



رابط من الحياة اليومية

ظهر أول نظام ألعاب فيديو محمول ناجح تم بيعه تجاريًا عام 1989 وكانت قيمته 120 AED.

المصدر: PCWorld

نصيحة دراسية

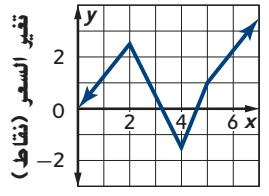
الثابت تكون الدالة ثابتة إذا كان التمثيل البياني لا يتحرك لأعلى أو لأسفل عند النظر إلى التمثيل البياني من اليسار أو اليمين.

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

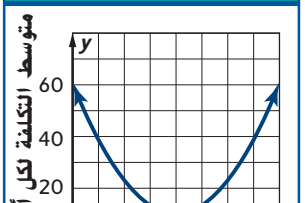
التحقق من فهمك

الأمثلة 1-3 **الاستنتاج المنطقي** حدد الدالة الممثلة بيانيًا باعتبارها *خطية* أو *غير خطية*. ثم قدّر وفسر تقاطعات التمثيل البياني وأي تناظر حيث الدالة فيها موجبة وسالبة وتزيد وتنقص وإحداثي x لأي قيم قصوى نسبية والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.

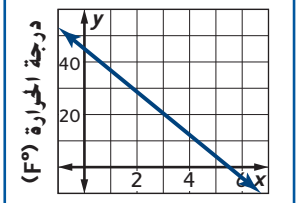
1. **قيمة الأوراق المالية**



2. **متوسط تكلفة إنتاج الأداة**



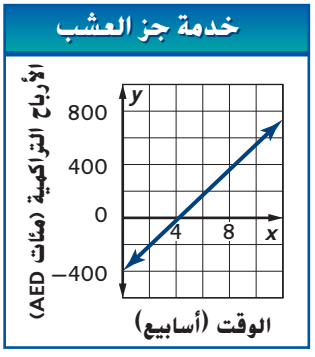
3. **تغير درجة الحرارة**



التمرين وحل المسائل

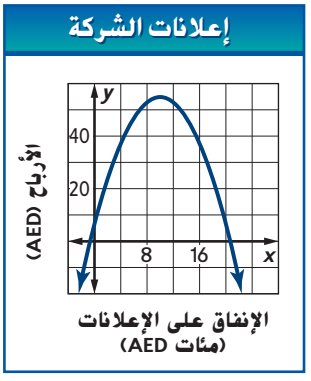
الأمثلة 1-3 **الاستنتاج المنطقي** حدد الدالة الممثلة بيانيًا باعتبارها *خطية* أو *غير خطية*. ثم قدّر وفسر تقاطعات التمثيل البياني وأي تناظر حيث الدالة فيها موجبة وسالبة وتزيد وتنقص وإحداثي x لأي قيم قصوى نسبية والسلوك الطرفي للتمثيل البياني.

4. **خدمة جز العشب**

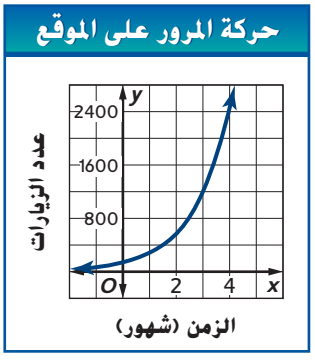


5. **انخفاض قيمة المركبة**

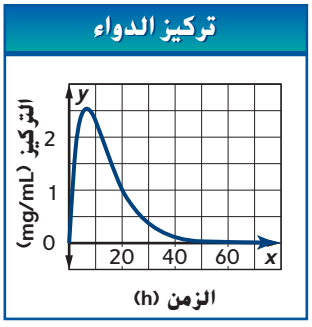
6. **إعلانات الشركة**



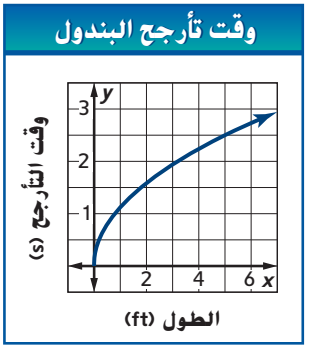
7. **حركة المرور على الموقع**



8. **تركيز الدواء**

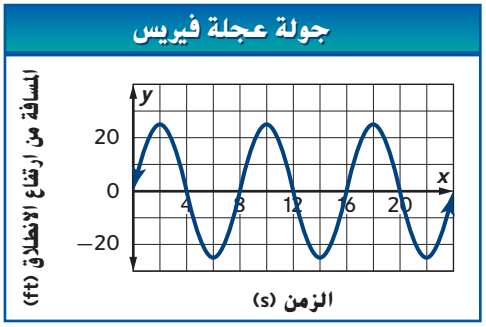


9. **وقت تأرجح البندول**



حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education

10. **عجلة فيريس** في مقدمة عجلة فيريس توجد عربة ركاب على نفس ارتفاع مركز العجلة. يتحدد الموقع y بالأقدام لهذه العربة بالنسبة للمركز بعد t من الثواني من بدء التشغيل بالدالة الممثلة بيانيًا على اليسار. حدد الخصائص الرئيسية للتمثيل البياني وفسّره. (تلميح: ابحث عن نمط في التمثيل البياني ليساعدك على وصف السلوك الطرفي فيه.)



ضع تمثيلاً بيانيًا لدالة يمكن أن تمثل كل موقف. حدد وفسّر تقاطعات التمثيل البياني، حيث التمثيل البياني يتزايد ويتناقص ويمثل أي قيمة عظمى نسبية.

11. ارتفاع نبات الذرة من وقت غرس البذرة إلى أن يصل إلى النضج بعد 120 يومًا

12. ارتفاع كرة القدم من وقت ركلها إلى أن تصل إلى الأرض بعد 2.8 ثانية

13. المبلغ المستحق على قرض سيارة منذ تاريخ شراء السيارة إلى أن يتم بيعها بعد 4 أعوام

ضع تمثيلات بيانية للدوال بالسمات التالية.

14. التمثيل البياني خطي ويتقاطع مع المحور الأفقي x عند -2. التمثيل البياني موجب عندما تكون $x < -2$، وسالب عندما تكون $x > -2$.

15. يحتوي التمثيل البياني غير الخطي على تقاطعات مع المحور الأفقي x عند -2 و2 وتقاطع مع المحور الرأسي y عند -4. التمثيل البياني له قيمة صغرى نسبية تبلغ -4 عندما تكون $x = 0$. التمثيل البياني يتناقص عندما تكون $x < 0$ ويتزايد عندما تكون $x > 0$.

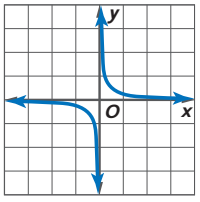
16. التمثيل البياني غير الخطي يتقاطع مع المحور الرأسي y عند 2، لكن لا توجد تقاطعات مع المحور الأفقي x. التمثيل البياني موجب ويتزايد لجميع قيم x.

17. يحتوي التمثيل البياني غير الخطي على تقاطعات مع المحور الأفقي x عند -8 و-2 وتقاطع مع المحور الرأسي y عند 3. التمثيل البياني له قيم صغرى نسبية عند $x = -6$ و$x = 6$ وقيمة عظمى نسبية عند $x = 2$. التمثيل البياني موجب عندما تكون $x < -8$ و$x > -2$ وسالب بين $x = -8$ و$x = -2$. مع انخفاض x تتزايد قيمة y ومع زيادة x تتزايد قيمة y.

مسائل مهارات التفكير العُليا استخدام مهارات التفكير العليا

18. **التفكير الناقد** تعتقد سارة أن كل الدوال الخطية لها تقاطع واحد فقط مع المحور الأفقي x. يعتقد أدهم أن الدالة الخطية يمكن أن يكون لها تقاطع واحد بحد أقصى مع المحور الأفقي x. هل كل منهما على صواب؟ اشرح استنتاجك.

19. **مسألة تحفيزية** صف السلوك الطرفي للتمثيل البياني الموضح.



20. **الاستنتاج** حدد ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة *أم خاطئة*. اشرح.

الدوال لها تقاطع واحد بحد أقصى مع المحور الرأسي y.

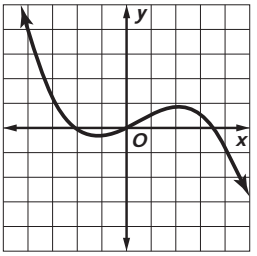
21. **مسألة غير محددة الإجابة** ضع تمثيلاً بيانيًا لدالة بقيمة عظمى نسبية واحدة وقيمة صغرى نسبية واحدة يمكن أن تمثل دالة من الحياة اليومية. صف كل محور وأدرج الوحدات الملائمة. ثم حدد القيمة القصوى النسبية لتمثيلك البياني وفسّرها.

22. **الكتابة في الرياضيات** صف الكيفية التي ستحدد بها الخصائص الرئيسية لتمثيل بياني موصوف في هذا الدرس باستخدام جدول قيم دالة.

McGraw-Hill Education محفوظة لصالح مؤسسة © حقوق الطبع والتأليف

تمرين على الاختبار المعياري

23. أي جملة تمثل الوصف الأمثل للسلوك الطرفي للدالة المعروضة؟



A مع تزايد قيمة x تزيد y ومع تناقص x تتزايد قيمة y.

B مع تزايد قيمة x تزيد y ومع تناقص x تتناقص قيمة y.

C مع تزايد قيمة x تنخفض y ومع تناقص x تتزايد قيمة y.

D مع تزايد قيمة x تنخفض y ومع تناقص x تتناقص قيمة y.

24. أيهم يوضح خاصية الانتقال في المعادلة؟

F إذا كانت $c = 1$، فإن $c \times \frac{1}{c} = 1$.

G إذا كانت $c = d$ و $d = f$، فإن $c = f$.

H إذا كانت $c = d$، فإن $d = c$.

J إذا كانت $c = d$ و $d = c$، فإن $c = 1$.

25. حوّل لأبسط صورة التعبير $5d(7 - 3) - 16d + 3 \times 2d$

A $10d$ **C** $21d$

B $14d$ **D** $25d$

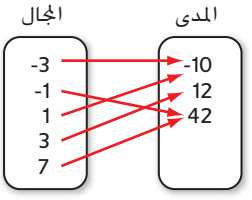
26. ما احتمالية اختيار بطاقة حمراء أو بطاقة واحدة من مجموعة أوراق قياسية؟

F $\frac{1}{26}$ **G** $\frac{1}{2}$ **H** $\frac{7}{13}$ **J** $\frac{15}{26}$

مراجعة شاملة

حدد ما إذا كانت كل علاقة دالة. (الدرس 7-1)

27.



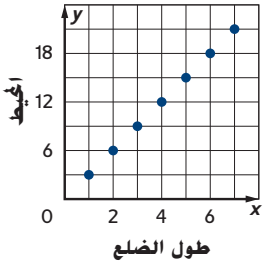
28. {(0, 2), (3, 5), (0, -1), (-2, 4)}

29.

x	y
17	6
18	6
19	5
20	4

30. **علم الهندسة** عبّر عن العلاقة في التمثيل البياني الموجود على اليسار في شكل مجموعة من الأزواج المرتبة. صف المجال والمدى. (الدرس 9-1)

مثلثات متساوية الأضلاع



استخدم خاصية التوزيع لإعادة كتابة كل تعبير. (الدرس 4-1)

31. $\frac{1}{2}d(2d + 6)$ 32. $-h(6h - 1)$ 33. $3z - 6x$

34. **الملابس** يملك سليم 30 جوربًا في درج جواربه. 16 من الجوارب بيضاء و6 سوداء و2 حمراء و6 صفراء. ما احتمالية أن ينتقي جوربًا أسود بصورة عشوائية؟ (الدرس 11-0)

مراجعة المهارات

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

35. $(-7)^2$ 36. 3.2^2 37. $(-4.2)^2$ 38. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح مؤسسة McGraw-Hill Education